AL03

Combinaisons linéaires d'éléments de $\mathbb{R}^n$

Version du 03-10-2022 à 17:16

Contexte

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, n et p désignent des entiers naturels non nuls.

$\square$

1. Combinaisons linéaires et sous-espace engendré

Définition 1 – Sous-espace engendré par une famille

On considère une famille $\mathcal{F}$ de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$ donnée par : $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$.
L'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{F}$ est :

$$\{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p, \text{ où } \lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}\}$$

ou ce qui revient au même : $\{u \in \mathbb{R}^n, \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p\}$
On note alors $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ cet ensemble, que l'on appelle sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par la famille de vecteurs $\mathcal{F}$.

Illustration | Exemple

Le vecteur $(-1, 0, 1)$ appartient-il à

$\mathrm{Vect}((1,0,1), (1,1,1), (-1,-1,3))$?

Si c'est le cas, déterminer la décomposition de $(-1, 0, 1)$ comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs.

Il s'agit de justifier l'existence d'un triplet (a, b, c) de réels tel que :

$$(\star) : (-1,0,1) = a(1,0,1) + b(1,1,1) + c(-1,-1,3)$$

ce qui conduit à s'intéresser, puis éventuellement à résoudre, à la compatibilité du système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{4}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{4}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

ce qui permet alors de dire que :

$$(-1,0,1) = -(1,0,1) + \frac{1}{2}(1,1,1) + \frac{1}{2}(-1,-1,3)$$

$\square$

Exemple 1 – Calcul mental | Appartenance à un sous-espace engendré

On désigne par e_1 et e_2 les deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $e_1 = (1, -1, 2)$ et $e_2 = (1, 1, -1)$.

A-t-on $u = (3, 1, 0) \in \text{Vect}\,(e_1, e_2)$?

A-t-on $u = (-1, -3, 4) \in \text{Vect}\,(e_1, e_2)$?

A-t-on $u = (1, -5, 8) \in \text{Vect}\,(e_1, e_2)$?

□

Exemple 2 – Toujours du calcul mental | Effectuer des combinaisons linéaires

On désigne par e_1 et e_2 les deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $e_1 = (1, -1, 2)$ et $e_2 = (1, 1, -1)$.

Déterminer $u = (x, 0, z)$ tel que $u \in \text{Vect}\,(e_1, e_2)$

Déterminer $u = (x, y, 0)$ tel que $u \in \text{Vect}\,(e_1, e_2)$

Déterminer $u = (1, y, z)$ tel que $u \in \text{Vect}\,(e_1, e_2)$

Déterminer $u = (1, 0, z)$ tel que $u \in \text{Vect}\,(e_1, e_2)$

□

2. Sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$ et sous-espaces engendrés | Version « guidée »

Exemple 3 – Sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ donné par une équation

On désigne par F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + z = 0\}$.

$u_1 = (1, 1, 1)$ appartient-il à F ?

$u_2 = (3, 1, -1)$ appartient-il à F ?

Quel système résoudre pour écrire $u = (x, y, z)$ comme combinaison linéaire de u_1 et u_2 ?

Le système précédent est-il toujours compatible ?
Quelle(s) condition(s) doit-on éventuellement avoir sur $u = (x, y, z)$?

Quel lien peut-on faire entre F, $\mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)$ et la compatibilité du système précédent ?

□

Exemple 4 – Sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ donné par un système d'équations

On désigne par F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par : $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+3y-z-t=0 \text{ et } 2x+y+z+2t=0\right\}$.

Par contemplation, donner un vecteur appartenant à F

Comment caractériser les éléments de F par la résolution d'un système linéaire ?

Résoudre le système précédent.

Quel lien peut-on faire entre F, les solutions du système précédent et l'écriture de F sous la forme de $F = \mathrm{Vect}\,(\dots)$?

$\square$

3. Sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$ et sous-espaces engendrés | Version « vers l'autonomie »

Exemple 5 – Sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ donné par une équation

On désigne par F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - z = 0\}$.

Comment caractériser les éléments de F par la résolution d'un système linéaire ?

Résoudre le système précédent.

Quel lien peut-on faire entre F, les solutions du système précédent et l'écriture de F sous la forme de $F = \mathrm{Vect}\,(\ldots)$?

□

Exemple 6 – Sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ donné par un système d'équations

On désigne par F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + z + t = 0 \text{ et } x - z + t = 0\}$.

Comment caractériser les éléments de F par la résolution d'un système linéaire ?

Résoudre le système précédent.

Quel lien peut-on faire entre F, les solutions du système précédent et l'écriture de F sous la forme de $F = \text{Vect}\,(\dots)$?

□

4. Sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$ et sous-espaces engendrés | Version « en mode totalement autonome »

Exemple 7 – Sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ donné par une équation

On désigne par F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x - y + z = 0\}$.

Écrire F sous la forme de $F = \text{Vect}\,(\dots)$

□

Exemple 8 – Sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ donné par une équation

On désigne par F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + z + 2t = 0\}$.

Écrire F sous la forme de $F = \mathrm{Vect}\ (\dots)$

□