

Combinaisons linéaires d'éléments de \mathbb{R}^n

Version du 03-10-2022 à 17:16

Contexte

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, n et p désignent des entiers naturels non nuls.

□

1. Combinaisons linéaires et sous-espace engendré

Définition 1 – Sous-espace engendré par une famille

On considère une famille \mathcal{F} de p vecteurs de \mathbb{R}^n donnée par : $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$.

L'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de \mathcal{F} est :

$$\{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p, \text{ où } \lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}\}$$

ou ce qui revient au même : $\{u \in \mathbb{R}^n, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p\}$

On note alors $\text{Vect}(\mathcal{F})$ cet ensemble, que l'on appelle sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n engendré par la famille de vecteurs \mathcal{F} .

Illustration | Exemple

Le vecteur $(-1, 0, 1)$ appartient-il à
 $\text{Vect}((1, 0, 1), (1, 1, 1), (-1, -1, 3))$?

Si c'est le cas, déterminer la décomposition de $(-1, 0, 1)$ comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs.

Il s'agit de justifier l'existence d'un triplet (a, b, c) de réels tel que :

$$(*) : (-1, 0, 1) = a(1, 0, 1) + b(1, 1, 1) + c(-1, -1, 3)$$

ce qui conduit à s'intéresser, puis éventuellement à résoudre, à la compatibilité du système de représentation matricielle

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array} \right) & \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{4}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{4}L_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 1L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array} \right) & \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \end{aligned}$$

ce qui permet alors de dire que :

$$(-1, 0, 1) = -(1, 0, 1) + \frac{1}{2}(1, 1, 1) + \frac{1}{2}(-1, -1, 3)$$

□

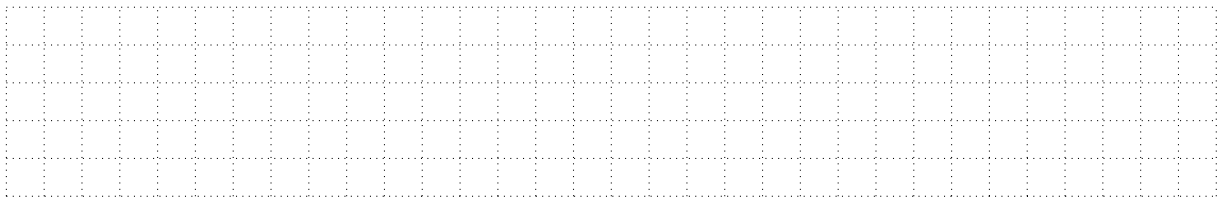
Exemple 4 – Sous-ensemble de \mathbb{R}^4 donné par un système d'équations

On désigne par F le sous-ensemble de \mathbb{R}^4 défini par : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 3y - z - t = 0 \text{ et } 2x + y + z + 2t = 0\}$.

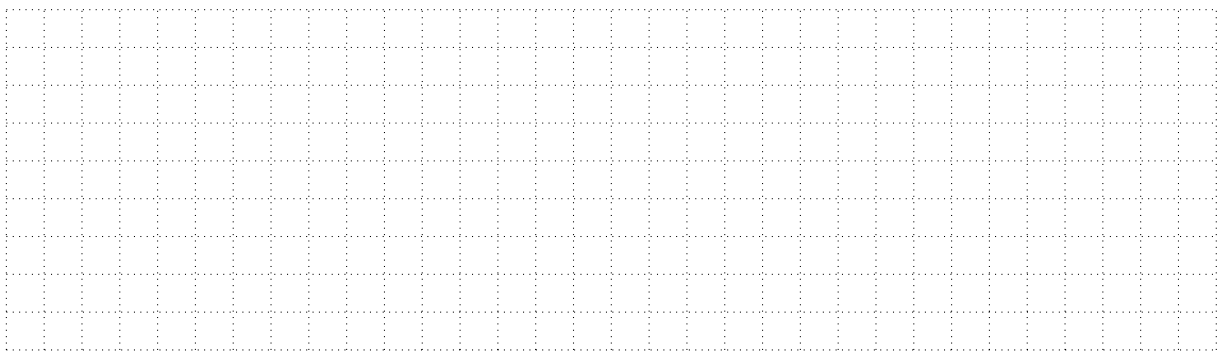
Par contemplation, donner un vecteur appartenant à F



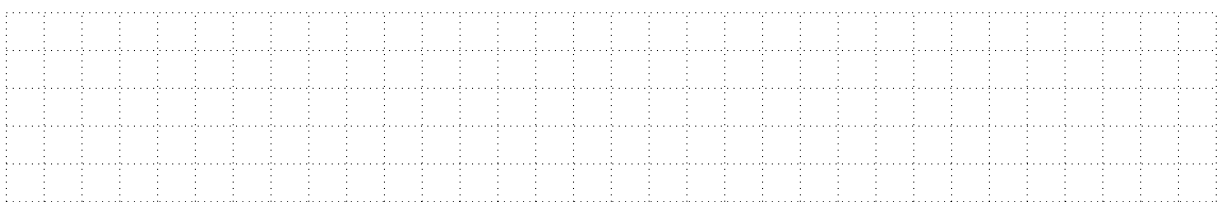
Comment caractériser les éléments de F par la résolution d'un système linéaire ?



Résoudre le système précédent.



Quel lien peut-on faire entre F , les solutions du système précédent et l'écriture de F sous la forme de $F = \text{Vect}(\dots)$?



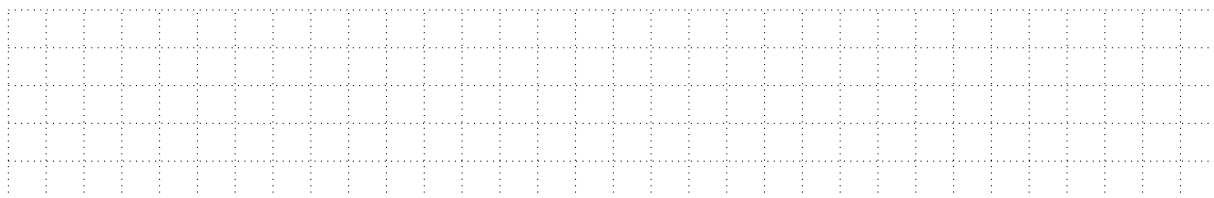
□

3. Sous-ensemble de \mathbb{R}^3 ou \mathbb{R}^4 et sous-espaces engendrés | Version « vers l'autonomie »

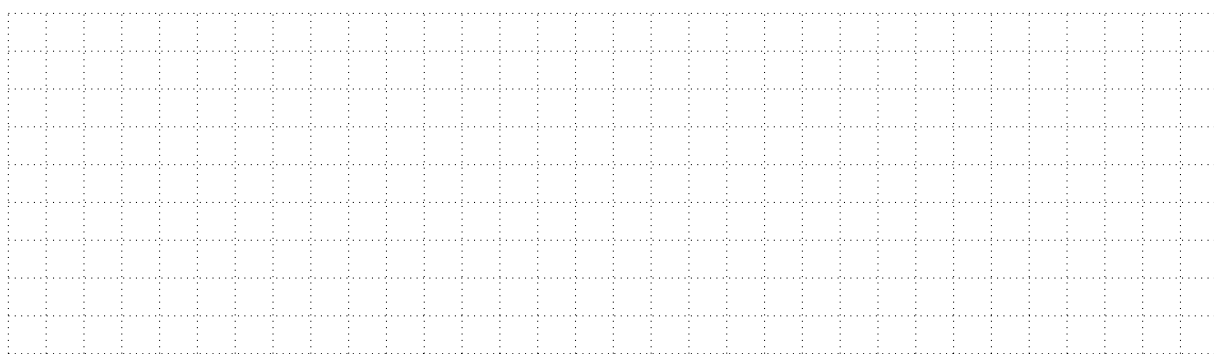
Exemple 5 – Sous-ensemble de \mathbb{R}^3 donné par une équation

On désigne par F le sous-ensemble de \mathbb{R}^3 défini par : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0\}$.

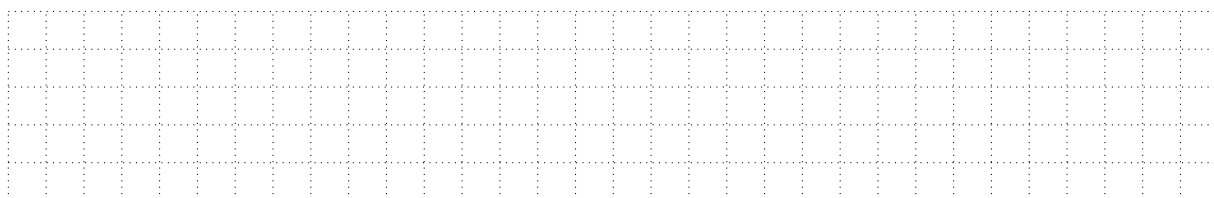
Comment caractériser les éléments de F par la résolution d'un système linéaire ?



Résoudre le système précédent.



Quel lien peut-on faire entre F , les solutions du système précédent et l'écriture de F sous la forme de $F = \text{Vect}(\dots)$?




□

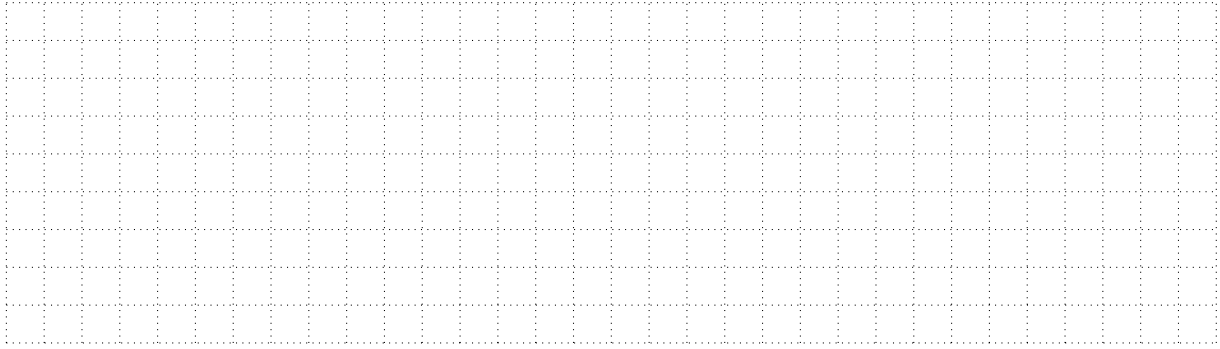
Exemple 6 – Sous-ensemble de \mathbb{R}^4 donné par un système d'équations

On désigne par F le sous-ensemble de \mathbb{R}^4 défini par : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0 \text{ et } x - z + t = 0\}$.

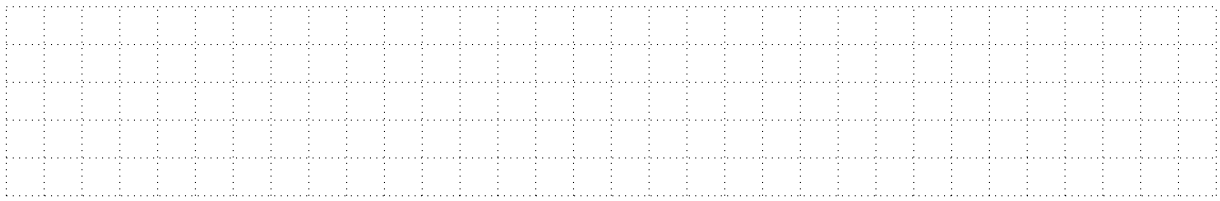
Comment caractériser les éléments de F par la résolution d'un système linéaire ?



Résoudre le système précédent.



Quel lien peut-on faire entre F , les solutions du système précédent et l'écriture de F sous la forme de $F = \text{Vect}(\dots)$?



□

4. Sous-ensemble de \mathbb{R}^3 ou \mathbb{R}^4 et sous-espaces engendrés | Version « en mode totalement autonome »

Exemple 7 – Sous-ensemble de \mathbb{R}^3 donné par une équation

On désigne par F le sous-ensemble de \mathbb{R}^3 défini par : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y + z = 0\}$.

Écrire F sous la forme de $F = \text{Vect}(\dots)$



□

Exemple 8 – Sous-ensemble de \mathbb{R}^4 donné par une équation

On désigne par F le sous-ensemble de \mathbb{R}^4 défini par : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y + z + 2t = 0\}$.

Écrire F sous la forme de $F = \text{Vect}(\dots)$

