AL11

Matrices d'applications linéaires

Version du 14-02-2023 à 16:45

1. Matrice d'une application linéaire

Contexte

Dans tout ce qui suit, p et q désigneront deux entiers naturels non nuls. Par ailleurs :

- E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie $q \geq 1$ dont on note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_q)$ une base.
- F est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie $p \geq 1$ dont on note $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_p)$ une base.
- $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

□

Définition 1 – Matrice d'une application linéaire

On appelle **matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$**, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, la matrice $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est donné par :

$$\forall j \in [\![1;q]\!], \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i$$

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ est la matrice dans la base $\mathcal{C}$ de la famille de vecteurs $(u(e_1), \ldots, u(e_q))$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u(e_1), \ldots, u(e_q))$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & \cdots & u(e_q) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_p \end{array} \end{array}$$

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ dépend fortement du choix des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

□

Point méthode 1 – Écrire la matrice pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$

Pour écrire la matrice de $u \in \mathcal{L}(E, F)$ dans les bases $\underbrace{\mathcal{B}}_{\text{Base de } E}$ et $\underbrace{\mathcal{C}}_{\text{Base de } F}$:

(1). on détermine les images par u de chaque vecteur de la base $\mathcal{B}$ de E.

(2). on exprime ces images dans la base $\mathcal{C}$ de F.

(3). on écrit en colonnes les coordonnées obtenues.

□

2. Exploiter la matrice d'une application linéaire

Exemple 1 – Exploiter la linéarité

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Image par f des vecteurs de $\mathcal{B}_3$

$f(e_1) =$

$f(e_2) =$

$f(e_3) =$

Image par f des vecteurs $u = (-1, 2, -2)$, $v = (2, 1, -3)$ et $w = (6, -2, 3)$

$$\begin{aligned} u &= \dots e_1 + \dots e_2 + \dots e_3 \\ f(u) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= \dots e_1 + \dots e_2 + \dots e_3 \\ f(v) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= \dots e_1 + \dots e_2 + \dots e_3 \\ f(w) &= \end{aligned}$$

□

Exemple 2 – Exploiter la linéarité

On considère g l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A dans les bases canoniques $\mathcal{B}_4 = (f_1, f_2, f_3)$ de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Image par g des vecteurs de $\mathcal{B}_4$

$g(f_1) =$

$g(f_2) =$

$g(f_3) =$

$g(f_4) =$

Image par f des vecteurs $u = (3, -1, 2, -2)$, $v = (2, 2, 1, -3)$ et $w = (-1, 2, -2, 3)$

$$\begin{aligned} u &= \dots f_1 + \dots f_2 + \dots f_3 + \dots f_4 \\ g(u) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= \dots f_1 + \dots f_2 + \dots f_3 + \dots f_4 \\ g(v) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= \dots f_1 + \dots f_2 + \dots f_3 + \dots f_4 \\ g(w) &= \end{aligned}$$

□

Exemple 3

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner un élément du noyau de f

□

Exemple 4

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Donner deux éléments du noyau de f

□

Exemple 5 – Calcul d'images par produit matriciel

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Image par f de $u = (1, 2, -3)$

Le vecteur u s'identifie à la matrice colonne $U = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$.

L'image de u par f s'obtient par le produit matriciel $A \times U$: $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

et par suite $f(u) =$

Image par f de $v = (3, -4, 2)$ par produit matriciel

Le vecteur v s'identifie à la matrice colonne $V = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$.

L'image de v par f s'obtient par le produit matriciel $A \times V$: $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

et par suite $f(v) =$

$\square$

Exemple 6 – Calcul d'images par produit matriciel

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques $\mathcal{B}_4 = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Image par f de $u = (-4, 1, 2, -3)$

Le vecteur u s'identifie à la matrice colonne $U = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$.

L'image de u par f s'obtient par le produit matriciel $A \times U$: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

et par suite $f(u) =$

Image par f de $v = (3, 0, 3, -1)$ par produit matriciel

Le vecteur v s'identifie à la matrice colonne $V = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$.

L'image de v par f s'obtient par le produit matriciel $A \times V$: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

et par suite $f(v) =$

$\square$

3. Obtention de la matrice d'une application linéaire

Exemple 7 – Matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-x-2y+z, 2x+y-z, 2x-y+3z) \end{array} \right.$.

On admet que f est une application linéaire.

Calcul des images de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ | Matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

□

Exemple 8 – Matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+2y+z, 2x+y+2z, x+2y+2z) \end{array} \right.$.

On admet que f est une application linéaire.

Calcul des images de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ | Matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

□

Exemple 9 – Matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$

On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x-2y+z, x+y+z, 2x-y+3z, 2x-2y+4z) \end{array} \right.$.

On admet que f est une application linéaire.

Calcul des images de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ | Matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$

□

Exemple 10 – Matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$

Soient $u = (1, 2)$ et $v = (-3, 1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x+y+z)u + (x-y-z)v \end{array} \right.$.
On admet que f est une application linéaire.

Calcul des images de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ | Matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$

□

Exemple 11 – Matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Soient $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, -3, 1)$ et $w = (1, 0, -1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x+y)u + (y-x)v + xw \end{array} \right.$.
On admet que f est une application linéaire.

Calcul des images de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ | Matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

□

Exemple 12 – Matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$

On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & (2x - y + 3z - t, 3x - 2y + 2t, 4y - 2z + 2t) \end{array} \right.$.
On admet que f est une application linéaire.

Calcul des images de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ | Matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$

□