AL10

Applications linéaires

Version du 07-02-2023 à 18:04

Contexte

Dans tout ce qui suit, E et F désignent des espaces vectoriels qui seront principalement pour ce qui nous concerne $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}_n[X]$.

□

Caractérisation des applications linéaires

Théorème 1 – Caractérisation des applications linéaires

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors :

$$(\, f \text{ est linéaire} \,) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall (u,v) \in E \times E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)\,)$$

Pour une application linéaire, l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.

Montrer qu'une application est linéaire

Pour montrer que $f : E \longrightarrow F$ est linéaire :
- On explicite le vecteur $w = \lambda u + v$;
- On calcule $f(w)$;
- On s'assure que :

$$\begin{aligned} f(w) &= \ldots \\ &= \ldots \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

où $(u,v) \in E \times E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Rédaction possible

Soit $(u,v) \in E \times E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On pose $w = \lambda u + v$ c'est à dire $w = \ldots$.
Montrons que $f(w) = \lambda f(u) + f(v)$.
Par définition de f, on a :

$$\begin{aligned} f(w) &= \ldots \\ &= \ldots \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire.

On adaptera nos notations au contexte des espaces vectoriels dans lesquels on travaille.

□

Reconnaître une application linéaire

Exemple 1 – Montrer que l'application f donnée ci-après est linéaire...

Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z)u + (x-y-z)v \end{array} \right.$.

Soient

On pose :

et montrons que :

Calcul des images de la base canonique de $\mathbb{R}^3$

□

Exemple 2 – Montrer que l'application f donnée ci-après est linéaire...

Soient u, v et w trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y)u + (y-x)v + xw \end{array} \right.$.

Soient

On pose :

et montrons que :

Calcul des images de la base canonique de $\mathbb{R}^2$

□

Exemple 3 – Montrer que l'application f donnée ci-après est linéaire...

On considère l'application f donnée par : $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \operatorname{tr}(M)\mathrm{I}_2 + {}^t M \end{array}\right.$.

Soient

On pose :

et montrons que :

Calcul des images de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

□

Exemple 4 – Montrer que l'application f donnée ci-après est linéaire...

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'application f donnée par : $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ (x,y,z) & \longmapsto & xA + yA^2 + zA^3 \end{array}\right.$.

Soient

On pose :

et montrons que :

Calcul des images de la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$\square$

Exemple 5 – Montrer que l'application f donnée ci-après est linéaire...

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM + A^2M - MA \end{array} \right.$.

Soient On pose : et montrons que :

Calcul des images de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\square$