

Applications linéaires

Contexte

Dans tout ce qui suit, E et F désignent des espaces vectoriels qui seront principalement pour ce qui nous concerne \mathbb{R}^n , $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}_n[X]$.

□

Caractérisation des applications linéaires

Théorème 1 – Caractérisation des applications linéaires

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Alors :



$$(f \text{ est linéaire}) \Leftrightarrow (\forall (u, v) \in E \times E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v))$$



Pour une application linéaire, l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.

Montrer qu'une application est linéaire

Pour montrer que $f : E \rightarrow F$ est linéaire :

- On explicite le vecteur $w = \lambda u + v$;
- On calcule $f(w)$;
- On s'assure que :

$$\begin{aligned} f(w) &= \dots \\ &= \dots \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

où $(u, v) \in E \times E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Rédaction possible

Soit $(u, v) \in E \times E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On pose $w = \lambda u + v$ c'est à dire $w = \dots$
Montrons que $f(w) = \lambda f(u) + f(v)$.
Par définition de f , on a :

$$\begin{aligned} f(w) &= \dots \\ &= \dots \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire.



On adaptera nos notations au contexte des espaces vectoriels dans lesquels on travaille.

□

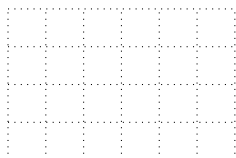
Reconnaître une application linéaire

Exemple 1 – Montrer que l'application f donnée ci-après est linéaire...

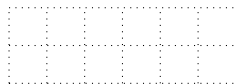
Soient u et v deux vecteurs de \mathbb{R}^2 .

On considère l'application f donnée par : $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto (x + y + z)u + (x - y - z)v \end{cases}$.

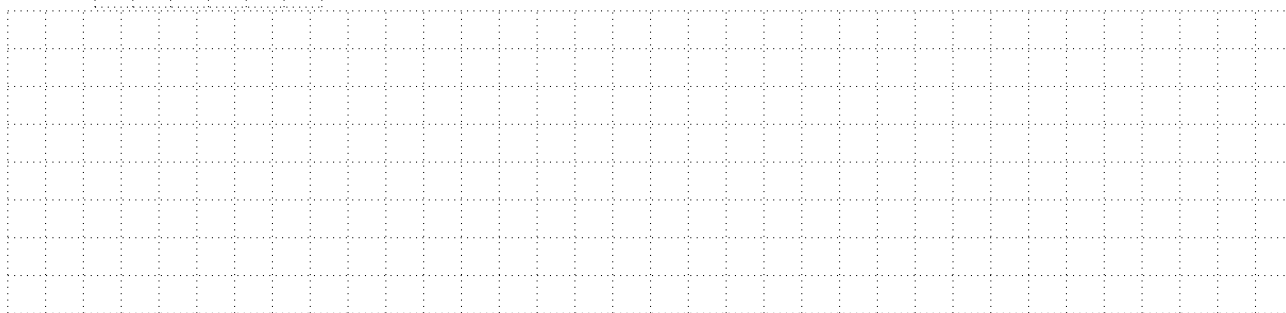
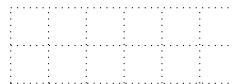
Soient



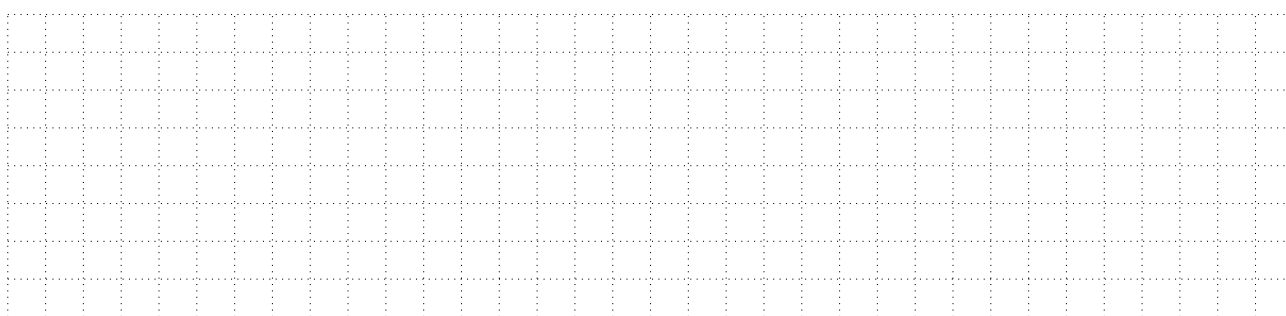
On pose :



et montrons que :



Calcul des images de la base canonique de \mathbb{R}^3



□

Exemple 2 – Montrer que l'application f donnée ci-après est linéaire...

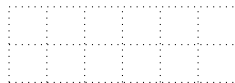
Soient u , v et w trois vecteurs de \mathbb{R}^3 .

On considère l'application f donnée par : $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto (x + y)u + (y - x)v + xw \end{cases}$.

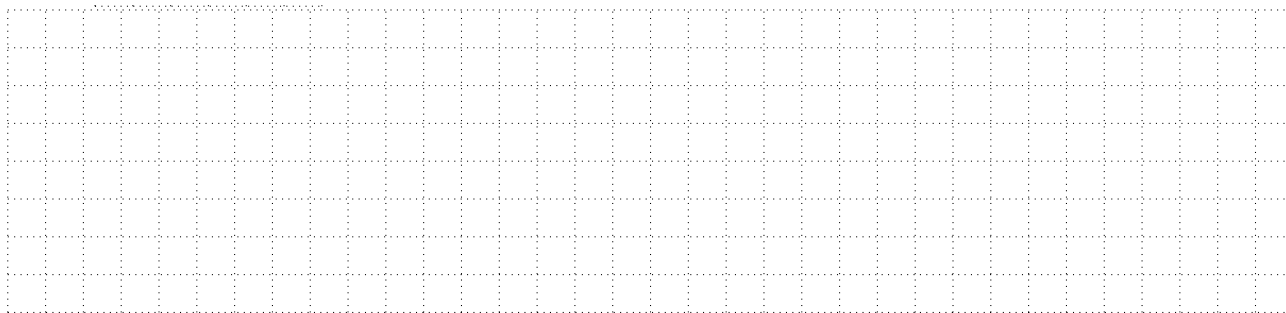
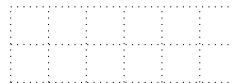
Soient



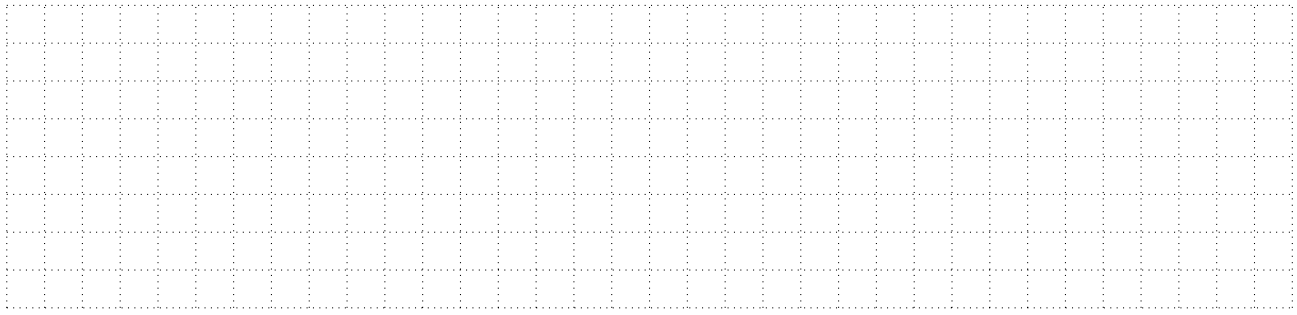
On pose :



et montrons que :



Calcul des images de la base canonique de \mathbb{R}^2



□

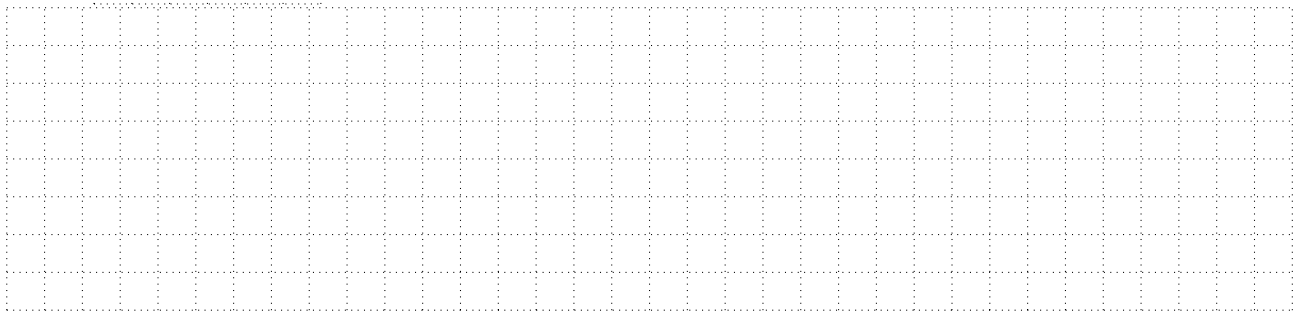
Exemple 3 – Montrer que l'application f donnée ci-après est linéaire...

On considère l'application f donnée par : $f : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto \text{tr}(M)\mathbf{I}_2 + {}^t M \end{cases}$.

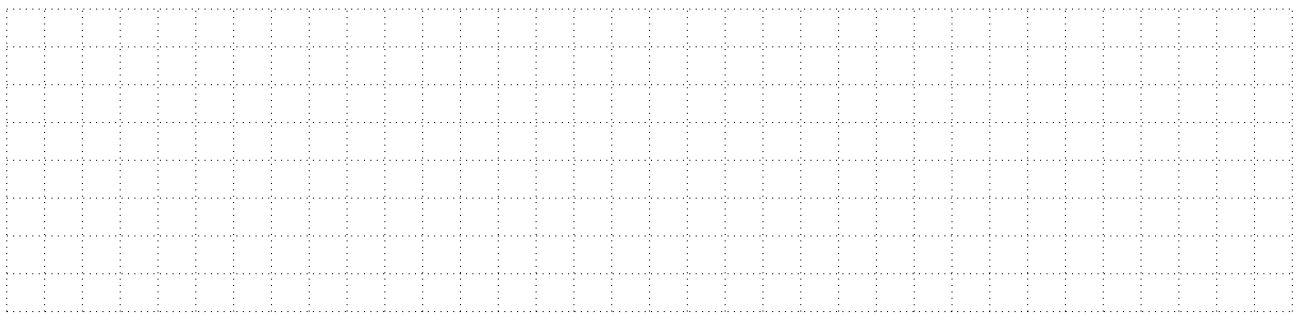
Soient 

On pose : 

et montrons que : 




Calcul des images de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$



□

Exemple 4 – Montrer que l'application f donnée ci-après est linéaire...

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'application f donnée par : $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ (x, y, z) & \longmapsto xA + yA^2 + zA^3 \end{cases}$.

Soient 

On pose : 

et montrons que : 