Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 0596

À l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{y}{\sqrt{y-1}}\,\mathrm{d}y$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 0596

- On dérivera le numérateur pour procéder à cette intégration par parties.

EX. 2 | Réf. 0597

À l'aide du changement de variables $u = \mathrm{e}^{\,t}$, calculer la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^{\,2}} \frac{\ln(u)}{u + u\left(\ln(u)\right)^2}\,\mathrm{d}u$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 0597

- On fera attention à gérer les bornes...et en écrivant les différentes relations permettant d'effectuer le changement de variables.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 0910

On considère la fonction f définie par : $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{2\mathrm{e}^{\,t}}{\sqrt{1+t^2}} \end{array}\right.$.

1. Dresser le tableau de variations complet pour f en précisant notamment les limites aux bornes de son ensemble de définition.

2. **a.** Démontrer que : $\forall t \in [0;+\infty[\,,\ 2\mathrm{e}^{\,t} - t - t^2 > 0$ et $1 + t \geq \sqrt{1+t^2}$.

b. En déduire que : $\forall t \in [0;+\infty[\,,\ f(t) > t$.

3. On considère l'application G donnée par : $G : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$.

a. Montrer que G est une fonction impaire.

b. À l'aide d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ dont on justifiera l'existence, montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et expliciter alors $G'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c. Quelle est la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

d. Dresser le tableau de variations complet pour G sur $\mathbb{R}$ en précisant notamment les limites aux bornes de son ensemble de définition.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 0910

1. On dérive et on étudie le signe de la dérivée, et on utilisera des croissances comparées pour déterminer les limites de f en faisant attention aux différentes factorisations nécessaires...
2. **a.** On pourra procéder à deux études de fonctions et/ou utiliser la quantité conjuguée pour étudier directement le signe.

   b. On exploite les deux relations précédentes pour minorer f.
3. **a.** On compare $G(x)$ et $G(-x)$ notamment ...

   b. On remarquera que $G(x) = F(x) - F(-x)$ et les règles opératoires (composition notamment) pour les fonctions continues/dérivables assureront la régularité de G, ainsi que le théorème fondamental de l'analyse pour le calcul de $G'(x)$.

   c. On pourra utiliser la minoration de f établie précédemment avec la croissance de l'intégrale pour trouver un minorant pour G, en travaillant sur les deux intervalles $[0; x]$ et $[-x; 0]$ pour $x > 0$.

   d. Il reste à étudier le signe de $G'(x)$...