Éléments de correction

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 0172

Dans tout cet exercice n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et A un matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$, et on note alors par $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On désigne par f l'application définie par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & ({}^tA)\,M + MA \end{array}\right.$

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. **a.** Soit M un matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $f(M)$ est encore une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
   b. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
3. Pour tout la suite, on se place dans le cas où $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   On considère par ailleurs les matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   a. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
   b. Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
   c. Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$ puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement.
   d. En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathcal{B}$.
   e. Déterminer alors la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ puis en donner une base.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 0172

1. **$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:** par construction
   Le vecteur nul de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$: en effet ${}^t(0) = (0)$ et $-(0) = (0)$ ce qui assure que ${}^t(0) = -(0)$ et donc que $(0) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
   $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire : soient $\left\{ \begin{array}{ccc} \lambda & \in & \mathbb{R} \\ M_1 & \in & \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \\ M_2 & \in & \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \end{array}\right.$. Posons $M_3 = \lambda M_1 + M_2$ et montrons que $M_3 \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ c'est à dire que ${}^tM_3 = -M_3$.
   Un calcul direct donne que :
   $$\begin{aligned} {}^tM_3 &= {}^t(\lambda M_1 + M_2) \\ &= \lambda \underbrace{{}^tM_1}_{\substack{=-M_1 \\ \textbf{car } M_1 \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}} + \underbrace{{}^tM_2}_{\substack{=-M_2 \\ \textbf{car } M_2 \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}} \\ &= -\lambda M_1 - M_2 \\ &= -(\lambda M_1 + M_2) \\ &= -M_3 \end{aligned}$$
   et donc $M_3 \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
2. **a.** Soit $f \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrons que $f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ c'est à dire que ${}^t(f(M)) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
   Un calcul direct donne que :
   $$\begin{aligned} {}^t(f(M)) &= {}^t(({}^tA)\,M + MA) \\ &= {}^t(({}^tA)\,M) +{}^t(MA) \\ &= {}^tM\,{}^t({}^tA) +{}^t A{}^tM \\ &= \underbrace{{}^tM}_{=-M} A +{}^t A \underbrace{{}^tM}_{=-M} \\ &= -MA -{}^t AM \\ &= -(MA +{}^t AM) \\ &= -f(M) \end{aligned}$$

b. D'après la question précédente, on a montré qu'en fait $f : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrons donc que f est linéaire.

Soient $\left\{\begin{array}{ccc} \lambda & \in & \mathbb{R} \\ M_1 & \in & \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \\ M_2 & \in & \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \end{array}\right.$. Posons $M_3 = \lambda M_1 + M_2$ et montrons que $f(M_3) = \lambda f(M_1) + f(M_2)$.

Un calcul direct donne que :
$$\begin{array}{rcl} f(M_3) & = & ({}^tA)\, M_3 + M_3 A \\ & = & ({}^tA)\,(\lambda M_1 + M_2) + (\lambda M_1 + M2)\, A \\ & = & \lambda\,({}^tA)\, M_1 + ({}^tA)\, M_2 + \lambda M_1 A + M_2 A \\ & = & \lambda\,({}^tA)\, M_1 + ({}^tA)\, M_2 + \lambda M_1 A + \underbrace{({}^tA)\, M_2 + M_2 A}_{f(M_2)} \\ & = & \lambda \underbrace{\left(({}^tA)\, M_1 + M_1 A\right)}_{=f(M_1)} + f(M_2) \\ & = & \lambda f(M_1) + f(M_2) \end{array}$$

ce qui était la relation attendue.

Par suite $f : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et f est linéaire, donc f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

3. a. En notant $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix}$, on a que :

$$\begin{array}{rcl} (M \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})) & \Leftrightarrow & ({}^tM = M) \\ & = & \left(\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{2,1} & m_{3,1} \\ m_{1,2} & m_{2,2} & m_{3,2} \\ m_{1,3} & m_{2,3} & m_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_{1,1} & -m_{1,2} & -m_{1,3} \\ -m_{2,1} & -m_{2,2} & -m_{2,3} \\ -m_{3,1} & -m_{3,2} & -m_{3,3} \end{pmatrix}\right) \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} m_{1,1} & = & -m_{1,1} \\ m_{2,1} & = & -m_{1,2} \\ m_{3,1} & = & -m_{1,3} \\ m_{2,2} & = & -m_{2,2} \\ m_{3,2} & = & -m_{2,3} \\ m_{3,3} & = & -m_{3,3} \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} m_{1,1} & = & 0 \\ m_{2,2} & = & 0 \\ m_{3,3} & = & 0 \\ m_{2,1} & = & -m_{1,2} \\ m_{3,1} & = & -m_{1,3} \\ m_{3,2} & = & -m_{2,3} \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left(M = \begin{pmatrix} 0 & m_{1,2} & m_{1,3} \\ -m_{1,2} & 0 & m_{3,2} \\ -m_{1,3} & -m_{3,2} & 0 \end{pmatrix},\ \left(m_{1,2}, m_{1,3}, m_{3,2} \in \mathbb{R}^3\right)\right) \end{array}$$

et donc que : $\quad (M \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})) \quad \Leftrightarrow \quad (M \in \mathrm{Vect}\,(J, K, L))$.

b. Supposons que l'on ait $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(\star) : aJ + bK + cL = (0)$.

$(\star)$ devient : $\quad \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et donc par identification des coefficients il vient directement que $\left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{array}\right.$ et donc par conséquent que la famille est libre.

Finalement, la famille (J, K, L) est une famille libre et génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, elle en forme donc une base, et comme c'est une famille de 3 vecteurs, on en déduit que $\dim(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = 3$.

c. Un calcul direct donne $f(J) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(K) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $f(L) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Par suite il vient que $f(J) = -J - L$ et $f(K) = -K$.

d. La famille (J, K, L) étant une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, on sait que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(J), f(K), f(L))$ et donc ici que l'on a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(-J - L, -K)$ ou encore que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\,(J + L, K)$. Les deux matrices $J + L$ et K étant clairement non nulles et non colinéaires, elles forment une famille libre. Par suite, la famille $(J + L, K)$ est une famille libre et génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Elle en forme donc une base.

e. D'après la question précédente, on sait que $\mathrm{Im}\,(f)$ est de dimension 2 puisque possédant une famille base de deux vecteurs.

D'après le théorème du rang on a : $\underbrace{\dim\left(\mathcal{A}_3\left(\mathbb{R}\right)\right)}_{=3} = \dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right) + \underbrace{\mathrm{rg}\,(f)}_{=2}$

ce qui assure que $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right) = 1$ et donc $\mathrm{Ker}\,(f)$ est une droite vectorielle.

Comme $f(K) = (0)$, on en déduit que $K \in \mathrm{Ker}\,(f)$ et par suite que $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\ (K)$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 0639

On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la famille $\mathcal{B} = (e_1,\,\ldots,\,e_n)$ où e_i est le $n-$uplet de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont nulles, sauf la i^{e} qui vaut 1.

On considère alors un vecteur $v = (v_1,\,\ldots,\,v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$.

On désigne par ailleurs par f l'application donnée par : $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x = (x_1,\,\ldots,\,x_n) & \longmapsto & x - \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v \end{array}\right.$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $f \circ f = f$.
3. **a.** Montrer que : $(y \in \mathrm{Im}\,(f)) \quad \Leftrightarrow \quad (f(y) = y)$.
   b. Montrer que la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$ est inférieure ou égale à $n-1$.
   c. Montrer que : $\forall i \in [\![1; n-1]\!]\,,\ (e_i - e_{i+1}) \in \mathrm{Im}\,(f)$.
   d. En déduire une base et la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$. Quel est alors le rang de f ?
4. Déterminer une base du noyau de f.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 0639

1. Soient $\left\{\begin{array}{rcl} \lambda & \in & \mathbb{R} \\ x = (x_1,\,\ldots,\,x_n) & \in & \mathbb{R}^n \\ y = (y_1,\,\ldots,\,y_n) & \in & \mathbb{R}^n \end{array}\right.$, posons $w = \lambda x + y$ avec $w = (w_1,\,\ldots,\,w_n)$. Montrons que $f\,(w) = \lambda f\,(u) + f\,(v)$.

   Par construction de w, on a que $\left\{\begin{array}{rcl} w_1 & = & \lambda x_1 + y_1 \\ w_2 & = & \lambda x_2 + y_2 \\ w_3 & = & \lambda x_3 + y_3 \end{array}\right.$ Un calcul direct donne alors que :

$$\begin{array}{rcl} f(w) & = & w - \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i\right) v \\ & = & w - \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + y_i)\right) v \\ & = & w - \left(\lambda\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i\right) v \\ & = & \lambda x + y - \lambda\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} n x_i\right) v - \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i\right) v \\ & = & \lambda x - \lambda\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} n x_i\right) v + \underbrace{y - \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i\right) v}_{=f(y)} \\ & = & \lambda \underbrace{\left(x - \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v\right)}_{=f(x)} + f(y) \\ & = & \lambda f(u) + f(v) \end{array}$$

ce qui assure le caractère linéaire.
Comme $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et que f est linéaire, f est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

2. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a donc que $f(x) = x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v$ et donc par linéarité de f, il vient que :

$$\begin{array}{rcl} f(f(x)) & = & f\left(x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v\right) \\ & = & f(x) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) f(v) \end{array}$$

or un calcul direct donne que $f(v) = \overrightarrow{0}$ ce qui assure donc que $f(f(x)) = f(x)$ et par suite que $f \circ f = f$.

3. a. Raisonnons par double implication :

Supposons que $y \in \mathrm{Im}(f)$ **:** par définition, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$.
Donc $f(y) = f(f(x))$ et par la question précédente, $f(y) = f(x)$ ce qui assure que $y = f(y)$.

Supposons que $y = (y_1, \ldots, y_n)$ **est tel que** $f(y) = y$ **:** on a donc que $f(f(y)) = f(y)$ et donc que $y = f(f(y))$ avec $f(f(y)) \in \mathrm{Im}(f)$ et donc $y \in \mathrm{Im}(f)$.

b. En reprenant les éléments précédents puisque $v \neq \overrightarrow{0}$:

$$\begin{array}{rcl} (y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathrm{Im}(f)) & \Leftrightarrow & (y = f(y)) \\ & \Leftrightarrow & \left(\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) v = \overrightarrow{0}\right) \\ & \Leftrightarrow & \left(\sum_{i=1}^{n} y_i = 0\right) \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} y_1 & = & -y_2 - y_3 - \ldots - y_n \\ y_2 & = & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & = & y_n \end{array}\right. \quad \text{où } (y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \end{array}$$

Par suite $\mathrm{Im}(f)$ est engendré par une famille d'au plus $n-1$ vecteurs et donc sa dimension est au plus $n-1$.

c. Soit $i \in [\![1; n-1]\!]$, un calcul direct donne que : $\begin{array}{rcl} f(e_i - e_{i+1}) & = & e_i - e_{i+1} - (0 + \ldots + 0 + 1 + (-1) + 0 + \ldots 0) v \\ & = & e_i - e_{i+1} \end{array}$

et donc on a que $f(e_i - e_{i+1}) = e_i - e_{i+1}$ et par ce qui précéde, on a que $e_i - e_{i+1} \in \mathrm{Im}(f)$.

d. Étudions la liberté de la famille $\mathcal{F} = (e_1 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_n)$.

Supposons que l'on ait $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $(\star)$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (e_i - e_{i+1}) = \overrightarrow{0}$

On a donc que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_{i+1} = \overrightarrow{0}$

puis un changement d'indices donne que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i - \sum_{i=2}^{n} \lambda_{i-1} e_i = \overrightarrow{0}$

et par suite que : $\displaystyle\lambda_1 e_1 + \sum_{i=2}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) e_i + \lambda_{n-1} e_n = \overrightarrow{0}$

Il s'agit donc d'une combinaison linéaire nulle des vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$ qui forment une base de $\mathbb{R}^n$ donc en particulier est une famille libre de $\mathbb{R}^n$, et par suite il vient que : $\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 - \lambda_1 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n-1} - \lambda_{n-2} & = & 0 \\ \lambda_{n-1} & = & 0 \end{array}\right.$

et par conséquent : $\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n-1} & = & 0 \end{array}\right.$ ce qui assure la liberté de la famille $\mathcal{F}$.

Par ailleurs comme $\mathrm{Im}\,(f)$ est de dimension au plus $n-1$ et que la famille $\mathcal{F}$ est une famille libre de vecteurs de $\mathrm{Im}\,(f)$ qui possède $n-1$ vecteurs, on a donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$, ce qui amène alors à $\mathrm{rg}\,(f) = n-1$ puisque cette base est constituée de $n-1$ vecteurs.

4. On a vu que $f(v) = \overrightarrow{0}$ donc $v \in \mathrm{Ker}\,(f)$.
Par ailleurs, d'après le théorème du rang : $\underbrace{\dim(\mathbb{R}^n)}_{=n} = \dim(\mathrm{Ker}\,(f)) + \underbrace{\mathrm{rg}\,(f)}_{=n-1}$
ce qui donne que $\mathrm{Ker}\,(f)$ est de dimension 1 et que c'est donc une droite vectorielle.
Comme $v \in \mathrm{Ker}\,(f)$, il vient alors que $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(v)$.